FONCTIONS D’UNE VARIABLE REELLE

Notion de fonction

Une fonction f permet d'associer à tout nombre x d'un ensemble D_f un nombre unique y.
L'ensemble D_f est appelé ensemble de définition de la fonction f.
L'ensemble ou domaine de définition d'une fonction ƒ est l'ensemble de tous les réels x pour lesquels ƒ(x) existe ou est calculable.

Le nombre x est une variable qui parcourt cet ensemble.
Le nombre y est l'image de x.
Il est important de noter que tout élément de l'ensemble de définition a une image et que celle-ci est unique

Calcul de l'image d'un nombre

L'image d'un nombre x par une fonction f se note f (x); on lit «f de x».
Pour désigner la fonction qui à x associe f (x) on écrit f : $x \mapsto f(x)$.

Exemples 1. Soit f la fonction qui à x associe son double On écrira f : $x \mapsto 2x$

L'image de 5 est $2 \times 5 = 10$, on écrit f (5) =10.

2. Soit g la fonction qui à x associe son carré On écrira g : $x \mapsto x^2$

L'image de 3 est $3^2=9$, on écrit g(3) = 9.

3. Considérons la fonction h : $x \mapsto x^2 - 5x$ et calculons l'image de (-4).

Antécédent

Considérons une fonction f et deux réels a et b tels que b = f (a). b est l'image de a. On dit alors que a est un antécédent de b.

Le nombre a n'a qu'une image mais b peut avoir plusieurs antécédents

Les antécédents par une fonction f d'un réel b sont les réels dont l'image est b, ce sont donc les solutions de l'équation f (x) = b; leur nombre dépend de la fonction f .

Exemples 1. On considère la fonction $f : x \mapsto x - 3$. Quel est le ou les antécédents de 5?

2. la fonction $h : x \mapsto x^2 + 1$ et cherchons le ou les antécédents de 0

- Représentation graphique d'une fonction

Soit f une fonction sur l'ensemble D_f. Dans le plan muni d'un repère, on appelle représentation graphique de f l'ensemble des points M(x, y) pour lesquels x est élément de D_f et y = f (x). Ces points forment la courbe d'équation y=f(x)

Exemple Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3$ définie sur l'intervalle [-3 ; 3] et construisons sa représentation graphique.

l'ensemble De définition

Lorsqu'on étudie une fonction, il est nécessaire de donner d'abord son domaine de définition. On peut alors l'étudier sur tout intervalle I contenu dans D_f.

On distingue, en général, deux conditions d'existence :

C1 : Une expression algébrique dans un dénominateur doit être différente de zéro ;

C2 : Une expression sous la racine carrée doit être positive ou nulle.

D'autres conditions s'ajouteront en étudiant de nouvelles fonctions.

Ex. 1°) Soit ƒ la fonction définie par $f(x)=3x^2-5x+7$

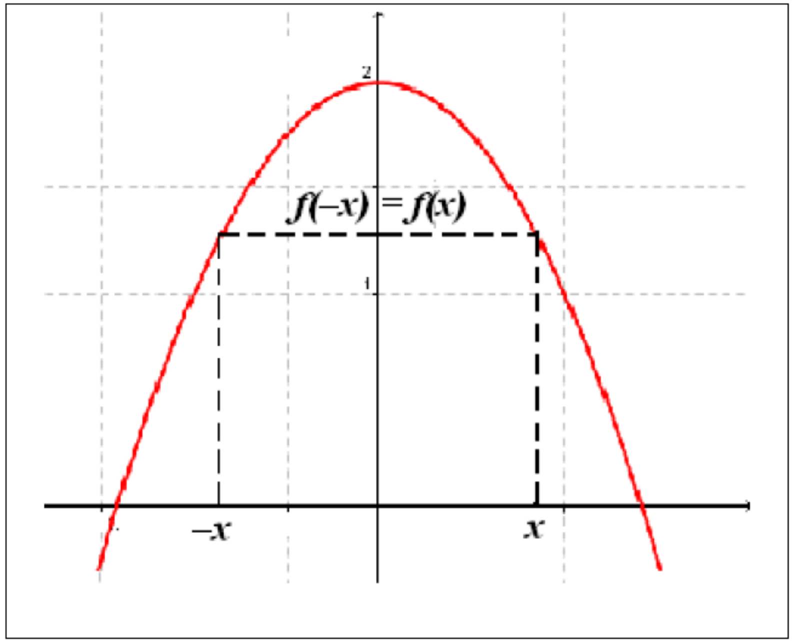
Cette fonction est définie pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$ et ne pose aucun problème d'existence. Donc son domaine de définition est $D_f=\mathbb{R}$.

Parité

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles $\mathbb{R}$ et ƒ une fonction définie sur D.
On dit que la fonction ƒ est paire lorsque : (2 conditions)
1°) le domaine de définition D est symétrique par rapport à zéro ;
2°) et pour tout $x \in D$: [$f(-x) = f(x)$]

Dans un repère orthogonal, la courbe représentatative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Exemple : La fonction carrée $x \to x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction paire car $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$



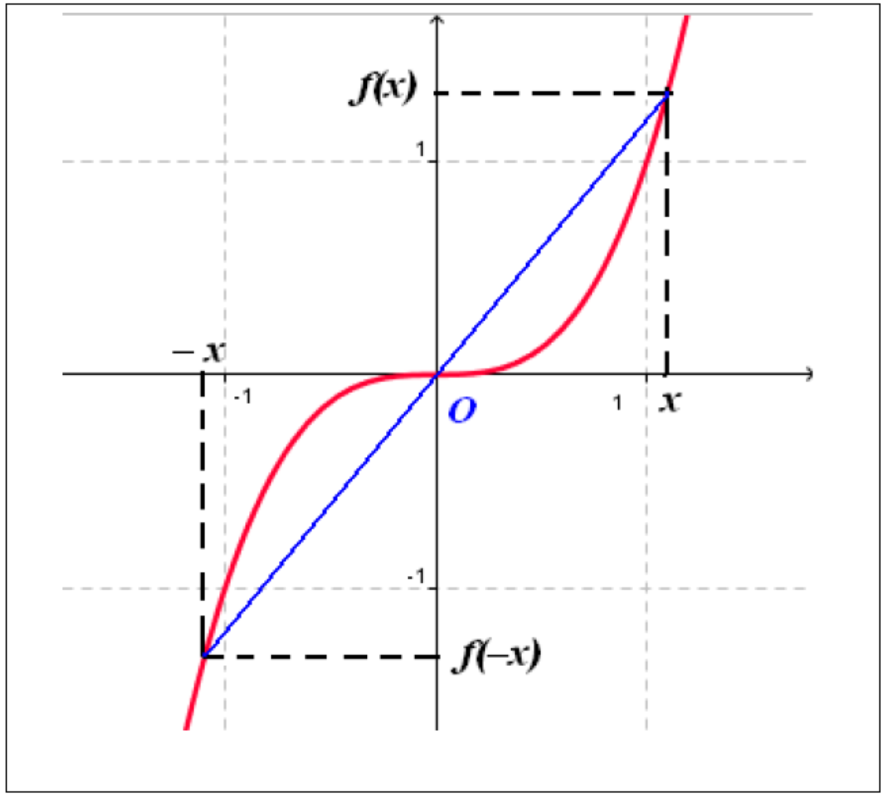
Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D.
On dit que la fonction f est ***impaire*** lorsque : (2 conditions)
1°) le domaine de définition D est symétrique par rapport à zéro ;
2°) et pour tout $x \in D$: [$f(-x) = -f(x)$]

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d’une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère.

Exemple :(modèle)

La fonction cube $x \to x^3$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction impaire car $D_f = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à zéro et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$



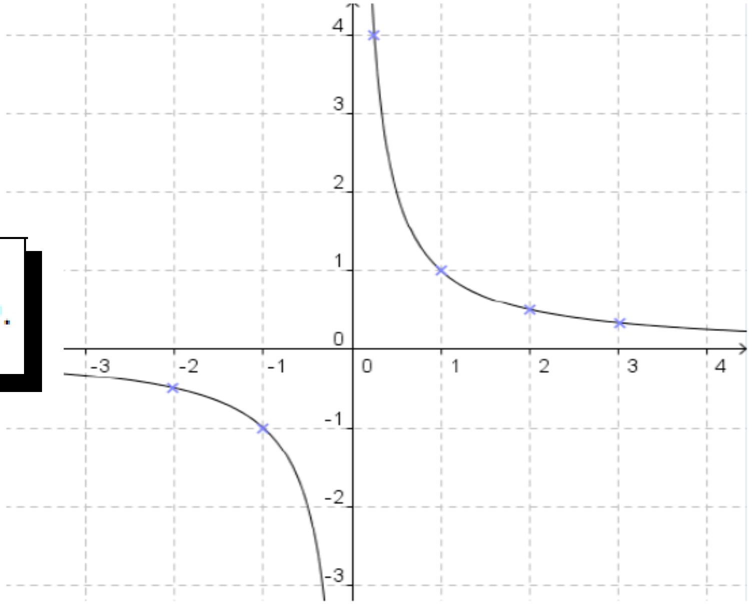
Limites

Limites d'une fonction en l'infini

- **Limite réelle en l'infini, asymptote horizontale**

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [A ; +∞[. On dit que f tend vers ℓ lorsque x tend vers +∞ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient aussi toutes les valeurs de f(x) pour x suffisamment grand.

On note $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ .On peut définir de même $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$



Propriété

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0\,; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0\,; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0\,; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0\,; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

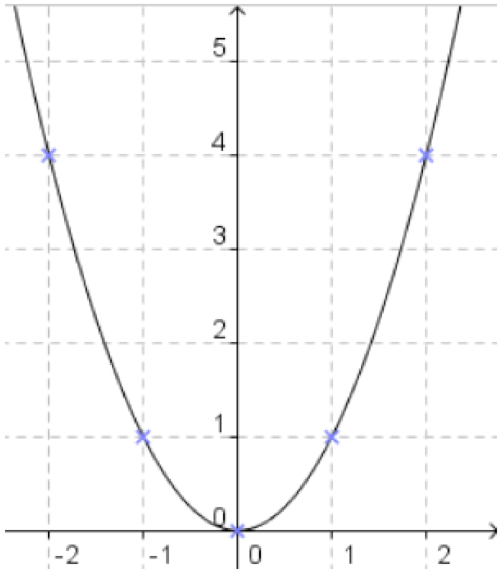
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle de la forme [*A* ; +∞[et C sa courbe représentative dans un repère.
Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ ou si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$, on dit que la droite d'équation *y* = *ℓ* est asymptote a C .

- **Limite infinie en l'infini**

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [A ; +∞[. On dit que f tend vers +∞ lorsque x tend vers +∞ si tout intervalle de la forme]M ; +∞[contient toutes les valeurs de f(x) pour x suffisamment grand.
On note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. On peut définir de même $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ...

Propriété

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty\,;\quad \lim_{x \to -\infty} x = -\infty\,;\quad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty\,;\quad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty\,;\quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$



- **Limite d'une fonction en un point**

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle *I* et *a* ∈ *I*. On dit que *f* tend vers *L* lorsque *x* tend vers *a* si tout intervalle ouvert contenant *L* contient aussi toutes les valeurs de *f*(*x*) pour *x* suffisamment proche de *a*.
On note $\lim_{x \to a} f(x) = l$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a ∈ I. On dit que f tend vers +∞ lorsque x tend vers a si tout intervalle de la forme]M ; +∞[contient toutes les valeurs de f(x) pour x suffisamment proche de a.

On note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$. On dit que la droite d'équation *x* = *a* est asymptote à la courbe représentative de f : C.

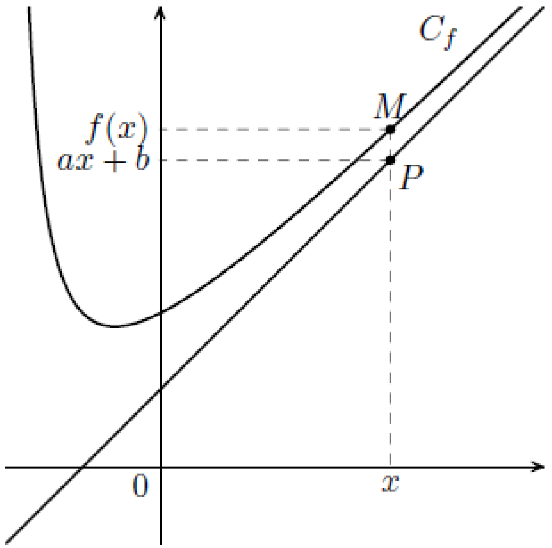
Propriété

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty\,; \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty\,; \qquad \lim_{x \to 0} x\frac{1}{x^2} = +\infty\,; \qquad \lim_{x \to 0} x\frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Asymptotes obliques

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [A ; +∞[et C sa courbe représentative dans un repère. Soient a et b deux réels avec a ≠ 0. $Si \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, on dit que la droite d'équation y = ax + b est asymptote oblique à la courbe C en +∞ (resp. en −∞).

Ainsi $Si \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, alors la longueur *MP* tend vers 0. La courbe ≪ se rapproche ≫ de la droite et tend a ≪ suivre la direction ≫ de la droite.



Opérations sur les limites

f et g sont deux fonctions ayant le même ensemble de définition D, a est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$ et est une borne de D, ℓ et ℓ sont deux réels.

Sommes de fonctions

f a pour limite en a	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$ a pour limite en a	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Produits de fonctions

f a pour limite en a	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
g a pour limite en a	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$f\times g$ a pour limite en a	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Quotients de fonctions

f a pour limite en a	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
g a pour limite en a	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$	0 en étant > 0	0 en étant > 0	0 en étant < 0	0 en étant < 0	0
$\frac{f}{g}$ a pour limite en a	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$	∞	$-\infty$	$+\infty$	?

Formes indéterminées

Quand on calcule des limites, les formes suivantes sont indéterminées

Formes indéterminées		
$0 \times \infty$	$\dfrac{\infty}{\infty}$	$\dfrac{0}{0}$
$+\infty - \infty$		

Polynômes, fonctions rationnelles

- La limite d'un polynôme en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ou $-\infty$ est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Exemple $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \mathbf{3.x^3 - 2.x^2 + 1}$

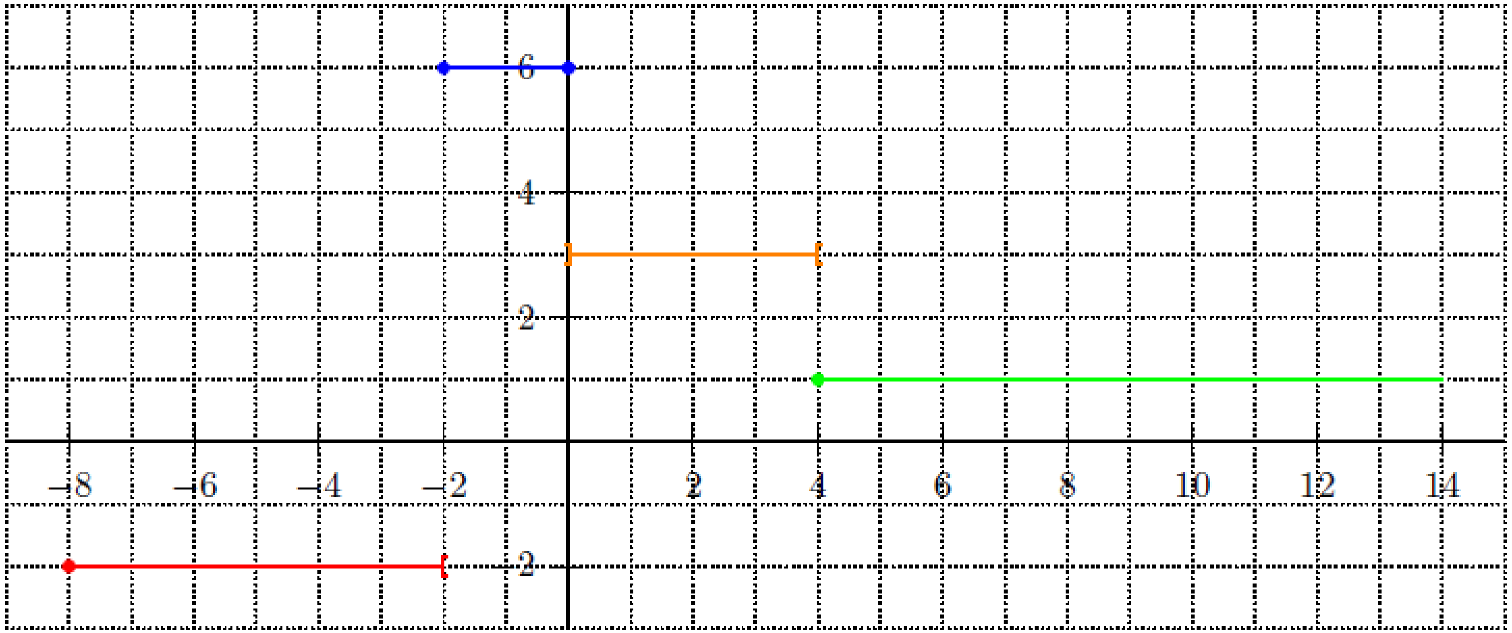
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \frac{3.x^3 + 2.x^2 + 1}{5.x^4 - 4.x^3 + x}$$

Fonctions usuelles

Fonctions en escalier

Définition 1 Une fonction en escalier est une fonction constante par intervalles.

Exemple 1
La fonction définie sur $[-8\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad -8 \leq x < -2 \\ 6 & \text{si} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ 3 & \text{si} \quad 0 < x < 4 \\ 1 & \text{si} \quad 4 \leq x \end{cases}$ est une fonction en escalier.



Fonctions affines

Définition 2

a et b sont deux réels donnés. La fonction définie sur R par **f(x) = ax + b** est appelée **fonction affine**.
Sa représentation graphique est la droite d'équation y = ax + b, où :

- Le réel a est le coefficient directeur de cette droite.
- Le réel b est l'ordonnée à l'origine

Exemple 2

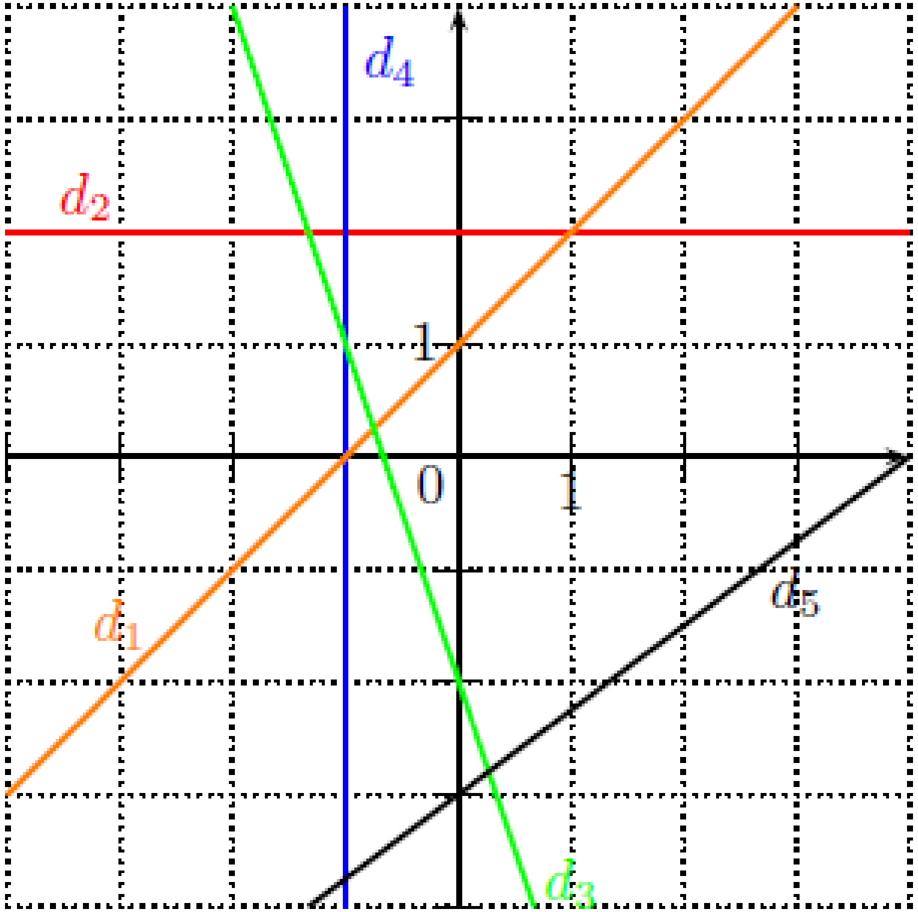
$d_1 : y = x + 1$

$d_2 : y = 2$

$d_3 : y = -3x - 2$

$d_4 : x = -1$

$d_5 : y = \frac{3}{4}x - 3$



Vocabulaire et notation :

La fonction qui, à chaque nombre x, associe le nombre 2x+3 est une fonction affine (où a = 2, et b = 3), que nous pouvons noter $f : x \mapsto 2x + 3$. L'image de 5 par cette fonction est $2 \times 5+3 = 13$, ce que l'on peut noter $f(5) = 13$.

Exercices

En justifiant la réponse, préciser si chacune des fonctions suivantes est affine, linéaire ou constante :

a) $f : x \mapsto 7x - 1$; b) $g : x \mapsto -3 + 2x$;

c) $h : x \mapsto -9x$; d) $i : x \mapsto -8$.

Fonction logarithme

Définition 3

La fonction logarithme népérien, notée ln, est l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur] 0 ; +∞ [qui s'annule en 1.

Conséquences directes :

• $\ln(1) = 0$,

• la fonction logarithme népérien est dérivable sur] 0 ; +∞ [et pour tout $x > 0$, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

Propriété 1

Soient a et b deux réels strictement positifs et n est un entier naturel, alors :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
- $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Propriété 2

On a les limites importantes suivantes :

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty.$

Conséquence : La droite *x* = 0 est donc asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction ln.

D'où le tableau de variations et la courbe :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$
signe	$-$	0	$+$