Analyse dimensionnelle

Le système international d'unités (SI)

7 grandeurs fondamentales :

Les unités SI des autres grandeurs s'expriment en fonction de ces unités de base.

Grandeur	***Unité SI***
Longueur	mètre (m)
Temps	seconde (s)
Masse	kilogramme (kg)
Intensité du courant	ampère (A)
Quantité de matière	mole (mol)
Température	kelvin (K)
Intensité lumineuse	candela (cd)

Exemples de grandeurs avec leur unité S.I :

- La vitesse $v=\frac{d}{t}$ s'exprime en mètre par seconde $m \cdot s^{-1}$
- L'énergie cinétique ($E_c = ½ mv^2$) s'exprime en joule et 1 J = 1 $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$
- L'unité SI de la concentration molaire

  $c = n/V$ est la mole par mètre cube ($mol \cdot m^{-3}$).

Notion de dimension

la dimension d'une grandeur G renseigne sur sa nature physique.
La dimension de la grandeur G se note [G].
Exemple: si G est une masse, alors [G] = M, elle a la dimension d'une masse; on dit aussi qu'elle est homogène à une masse.

Ecriture de quelques dimensions

Grandeur	Dimension
Longueur	L
Temps	T
Masse	M
Intensité du courant	I
Quantité de matière	N
Température	Θ

Analyse dimensionnelle

- **Faire l'analyse dimensionnelle d'une relation consiste à remplacer, dans la relation, chaque grandeur par sa dimension.**

- Exemple : la vitesse est le quotient d'une longueur par un temps, **l'équation aux dimensions** s'écrit : **[v]** = $\mathbf{LT^{-1}}$.

- .Lorsque dans l'écriture de l'équation aux dimensions d'une grandeur G, on obtient [G] =1, la grandeur est dite sans dimension ou de dimension 1

- Une équation est dite **homogène** si ses deux membres ont la même dimension

Règles sur les équations aux dimensions

- On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension
- La dimension du produit de deux grandeurs est le produit des dimensions de chacune des grandeurs: $[AB] = [A][B]$
- La dimension de A^n est égale à $[A]^n$ où n est un nombre sans dimension.
- Pour les fonctions suivantes: sin(u), cos(u), tan(u), ln(u), log(u) et e^u , la grandeur u est sans dimension.
- L'équation aux dimensions de toute grandeur G peut se mettre sous la forme:
  $[G] = L^a M^b T^c I^d J^e \theta^f N^g$

Exemples : exprimer la dimension des grandeurs **suivantes**

- Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} mv^2$

  $[E_c] = ?ML^2T^{-2}$

- Masse volumique : $\rho = \frac{m}{V}$

  $[\rho] = ?ML^{-3}$

- Densité d'un liquide : $d = \frac{\rho_{liquide}}{\rho_{eau}}$

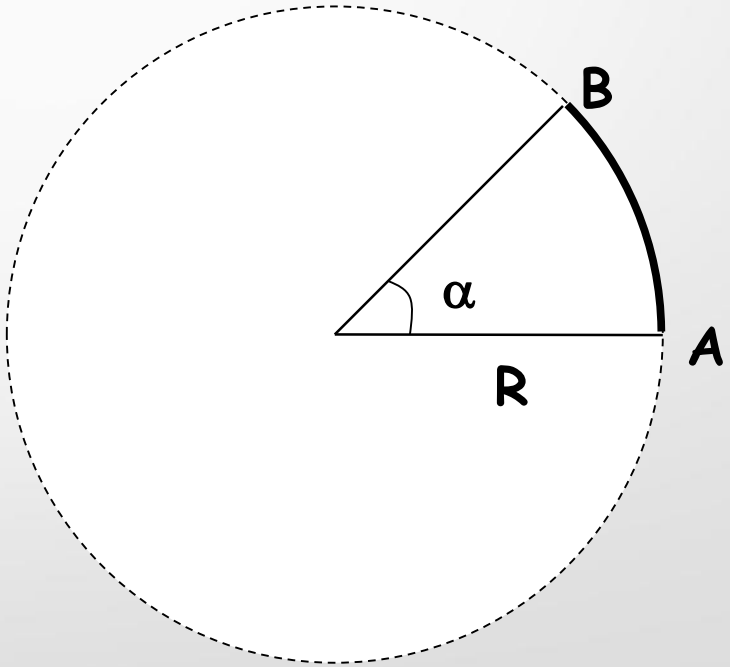
  $[d] = \frac{[\rho]}{?[\rho]} = 1$

La densité est une grandeur sans dimension.

- Remarque : une grandeur sans dimension peut cependant avoir une unité.

- Exemple : l'unité d'angle, dans le système international, est le radian et $[\alpha] = 1$ puisque :

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB}}{R}$$



Dimension d'une grandeur

- Dimension d'une force ?

On peut exploiter le théorème de la variation de l'énergie cinétique : $E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{F})$ $\quad F = \dfrac{\Delta E_c}{AB}$

$\Delta E_c = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cdot \cos\alpha \Rightarrow$ si $\alpha = 0$

$$[F] = \frac{[E_c]}{[AB]} = ML^2T^{-2}L^{-1} = \mathbf{MLT^{-2}}$$

Relation que l'on pourra retrouver (plus simplement) à partir de la 2e loi de Newton :

$$F = ma$$

Remarque : $[F] = MLT^{-2} \Rightarrow 1\ N = 1\ kg.m.s^{-2}$

Homogénéité d'une formule

- **Une équation est dite homogène si ses deux membres ont la même dimension.**

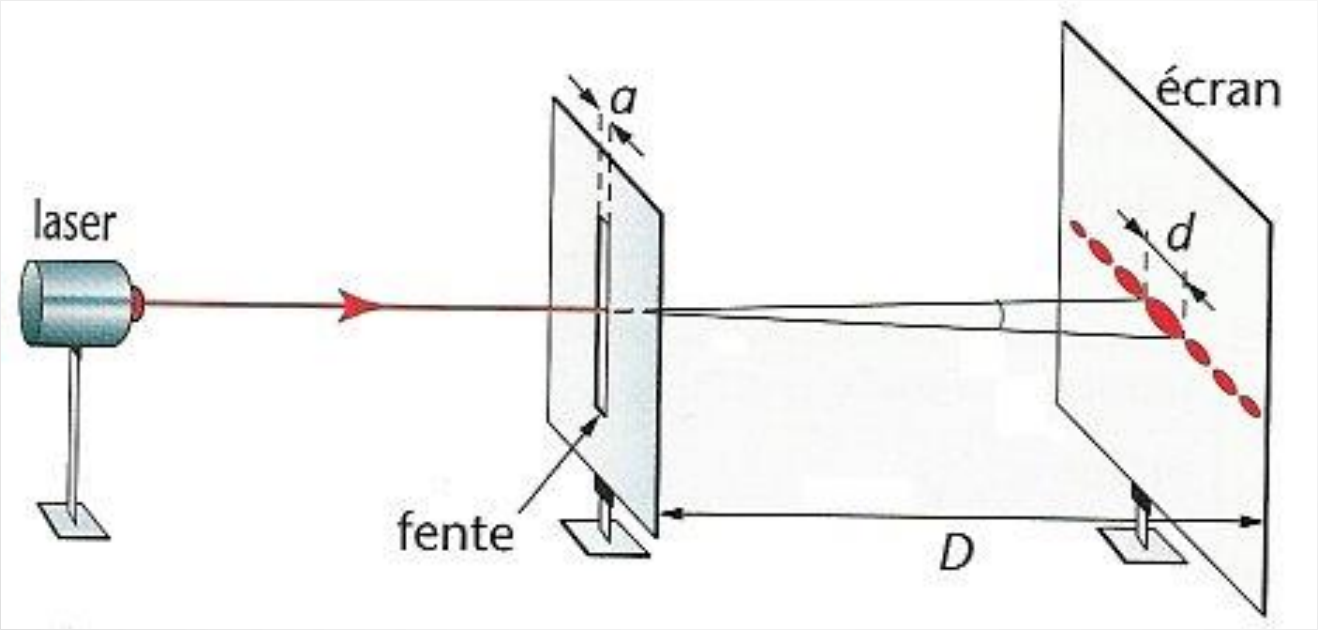
- Exemple : « $v = d \cdot t$ » n'est pas homogène :

$$[v] = LT^{-1} \quad \text{et} \quad [d \cdot t] = LT$$

La relation $v = d \cdot t$ est donc fausse.

- Attention, une expression homogène n'est pas nécessairement juste : $E_c = mv^2$…

Homogénéité d'une formule (suite)



- Le faisceau laser ayant une longueur d'onde λ, parmi les relations suivantes, lesquelles ne sont pas homogènes ?

$$d = \frac{2\lambda D}{a} \; ; \; d = \frac{2D^2}{\lambda a} \; ; \; d = \frac{2aD}{\lambda} \; ; \; d = 2\lambda aD$$

Homogénéité d'une formule

$$d = \frac{2\lambda D}{a} \quad ; \quad \cancel{d = \frac{2D^2}{\lambda a}} \quad ; \quad d = \frac{2aD}{\lambda} \quad ; \quad \cancel{d = 2\lambda aD}$$

$[d] = L^2L^{-1} = L$ $\qquad$ $[d] = L^2L^{-1} = L$

$[d] = L^2L^{-2} = 1 \neq L$ $\qquad$ $[d] = L^3 \neq L$

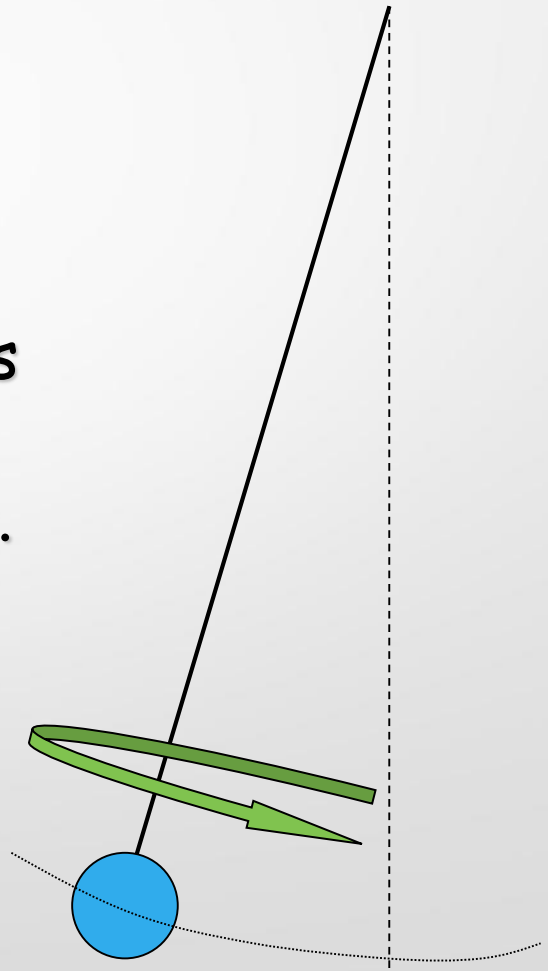
- La formule correcte est : $d = \frac{2\lambda D}{a}$

  Mais l'analyse dimensionnelle seule ne permet pas de la retrouver.

Homogénéité d'une formule

- Vérifier que la formule : $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ est homogène.

Formule où T_0 représente la période des oscillations d'un pendule simple, ℓ sa longueur et g l'intensité de la pesanteur.



Homogénéité d'une formule

- $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$

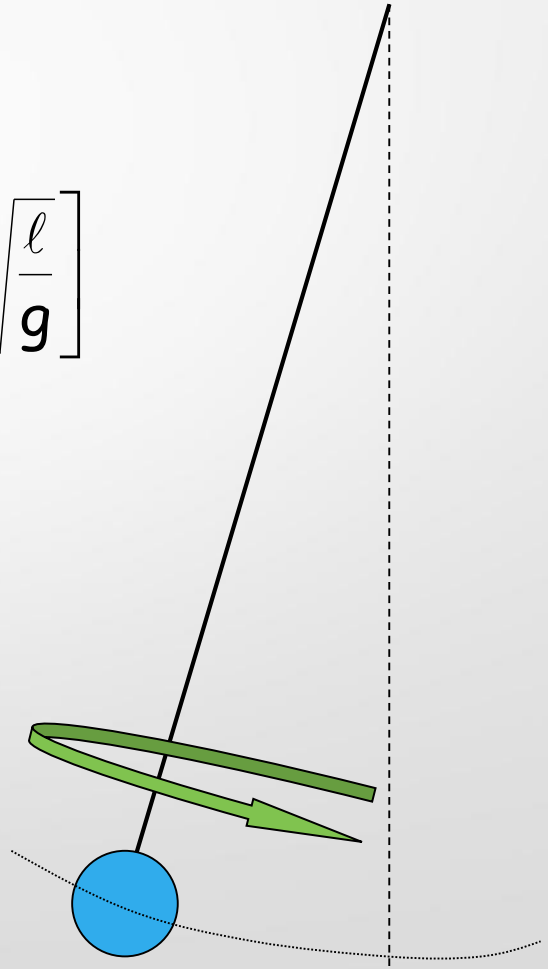
L'expression est homogène si : $[T_0] = \left[\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right]$

$[T_0] = \mathbf{T}$; $[\ell] = L$

$P = mg \Rightarrow g = P/m$

$[g] = [F]/[m] = MLT^{-2}M^{-1} = LT^{-2}$

$[\ell/g] = LT^2L^{-1} = T^2$ et donc $\left[\sqrt{\frac{\ell}{g}}\right] = \mathbf{T}$



- **Pour respecter l'homogénéité d'une relation, on ne peut ajouter que des grandeurs de même dimension.**
- Exemples : $E_c + E_p = E$; $u_R + u_C = 0$ …